逆凸計画問題に対するペナルティ関数を用いた分枝限定法

A Branch and Bound Procedure Using Penalty Functions to a Reverse Convex Programming Problem

山 田 修 司
YAMADA Syuuji

1 はじめに

本論文では, 次の逆凸計画問題 (reverse convex programming problem) を対象とする.

$$(RCP)\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x \in Y \setminus \text{int}\, X. \end{cases}$$

ただし, 目的関数 $f : R^n \to R$ は微分可能な凸関数, 集合 $X, Y \subset R^n$ は閉凸集合であり, int X は X の内部集合を表す. 一般に問題 (RCP) の制約集合は凸集合とはならないため, 容易に問題 (RCP) の最適解を求めることはできない.

逆凸計画問題に対する研究は, Rosen [8], Avriel and Williams [1], Mayer [6], Ueing [12] らに遡る. また, 工学設計や経済管理の分野において, 逆凸計画問題として表される問題が生じることが示されている (Avriel and Williams [1], Zaleesky [13]). さらに, 都市工学等の分野で生じる配置不可能領域をもつ配置問題はしばしば X, Y がコンパクトであるとは限らない問題 (RCP) として表される. 逆凸計画問題に対する解法として, 集合 X がコンパクト集合の場合に対しては Tuy and Thuong [9], Tuy [10] によって外部近似法が提案されており, 集合 X または Y が凸多面体の場合に対しては Horst and Tuy [4], Tuy [11], Konno, Thach and Tuy [5] によって内部近似法が提案されている.

本論文では, 集合 X, Y の共通部分がコンパクトであるより一般の場合における問題 (RCP) に対して, 分枝限定法に基づく新しい解法を提案する. 提案するアルゴリズムは, ペナルティ関数を用いることで, 大域的収束性が保証される.

本論文の構成は以下のとおりである. 第 2 章では対象とする逆凸計画問題 (RCP) に対して一般的な仮定を与え, 問題 (RCP) と等価な問題 (MP) を考える. 第 3 章では問題 (MP) に対するペナルティ関数法を用いた分枝限定法のアルゴリズムを提案する. 第 4 章では提案したアルゴリズムの大域的収束性を示す. さらに, 提案するアルゴリズムを有限回の反復で停止させるための一方法を提案する. 最後に, 第 5 章では結論を述べる.

やまだ しゅうじ (経営情報学科)

2 逆凸計画問題に対する仮定

本論文では, 逆凸計画問題 (RCP) に対して, 次の仮定が成立するものとする.

(A1) $Y\backslash \mathrm{int}\ X$ は空集合ではない. また, $Y\cap X$ はコンパクト集合である.

(A2) Y 上で関数 f を最小にする解 x^0 を既知とする.

(A3) $X=\{x\in R^n : p_j(x)\leq 0,\ j=1,\ldots,t_X\}, Y=\{x\in R^n : r_j(x)\leq 0,\ j=1,\ldots,t_Y\}$. ただし, $p_j : R^n\rightarrow R\ (j=1,\ldots,t_X), r_j : R^n\rightarrow R\ (j=1,\ldots,t_Y)$ は微分可能な凸関数である. また, ある $x_X, x_Y\in R^n$ に対して $p_j(x_X)<0\ (j=1,\ldots,t_X), r_j(x_Y)<0\ (j=1,\ldots,t_Y)$ が成立する.

ここで, $p(x)=\max\{p_j(x) : j=1,\ldots,t_X\}$, さらに $r(x)=\max\{r_j(x) : j=1,\ldots,t_Y\}$ とする. このとき, 仮定 (A3) より, $X=\{x\in R^n : p(x)\leq 0\}, Y=\{x\in R^n : r(x)\leq 0\}$, $\mathrm{int}\ X=\{x\in R^n : p(x)<0\}$ および $\mathrm{int}\ Y=\{x\in R^n : r(x)<0\}$ となる. 仮定 (A2) より, $x^0\notin \mathrm{int}\ X$ ならば, x^0 は問題 (RCP) の最適解となる. そこで, 本論文では

(A4) $x^0\in \mathrm{int}\ X$

を仮定する.

仮定 (A1) より, $Y\cap X\subset M_1$ を満足する単体 M_1 が存在する. ここで, 次の問題を考える.

$$(MP)\begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x\in (Y\backslash \mathrm{int}\ X)\cap M_1. \end{cases}$$

単体 M_1 はコンパクト集合なので, 問題 (MP) の制約集合はコンパクト集合である. したがって, 問題 (MP) の最適解が存在する. さらに, 次の補題より, 問題 (MP) の最適解は問題 (RCP) の最適解となることが示される.

補題 2.1 $\bar{x}$ を問題 (MP) の最適解とする. このとき, $\bar{x}$ は問題 (RCP) の最適解となる.

証明. $\bar{x}\in (Y\backslash \mathrm{int}\ X)\cap M_1$ なので, $\bar{x}$ は問題 (RCP) の実行可能解である. また, $Y\cap X\subset M_1$ より, $Y\cap \mathrm{bd}\ X\subset (Y\backslash \mathrm{int}\ X)\cap M_1$ が成立する. ただし, $\mathrm{bd}\ X$ は X の境界集合を表す. ここで, 任意の $x\in Y\backslash \mathrm{int}\ X$ に対して,

$$0<\lambda_x\leq 1 \text{ かつ } (1-\lambda_x)x^0+\lambda_x x\in Y\cap \mathrm{bd}\ X$$

を満たす $\lambda_x\in R$ が存在する. さらに, $\bar{x}$ の問題 (MP) に対する最適性および関数 f の凸性より, 任意の $x\in Y\backslash \mathrm{int}\ X$ に対して,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq f((1-\lambda_x)x^0+\lambda_x x) \\ &\leq (1-\lambda_x)f(x^0)+\lambda_x f(x) \\ &\leq (1-\lambda_x)f(x)+\lambda_x f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $\bar{x}$ は問題 (RCP) の最適解である.

□

補題 2.1 より, 仮定 (A4) が成立する場合においても問題 (RCP) の最適解が存在することが示された. さらに, 問題 (MP) を解くことにより, 問題 (RCP) の最適解が得られることがわかる.

3　ペナルティ関数を用いた分枝限定法

本論文では, 問題 (MP) に対するペナルティ関数を用いた分枝限定法に基づく解法を提案する.

3.1　問題 (MP) の過小評価

本節では, 提案するアルゴリズムの各反復で行われる問題 (MP) の最適値の過小評価法について説明する. そこで, 集合族 $\mathcal{M}$ が次を満たすものとする.

(B1) $(Y \backslash \mathrm{int}\ X) \cap M_1 \subset \cup_{M \in \mathcal{M}} M$.

(B2) すべての $M \in \mathcal{M}$ は単体である.

(B3) $\mathrm{int}\ M' \cap \mathrm{int}\ M" = \emptyset, \forall M', M" \in \mathcal{M}\ (M' \neq M")$.

(B4) $M \not\subset X, \forall M \in \mathcal{M}$.

本論文では, (B1), (B2) (B3), (B4) を満たす集合族 $\mathcal{M}$ を分割と呼ぶ.

任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して, 次の関数を考える.

$$F_{\mu_M}(x) = f(x) + \mu_M \theta(x).$$

ただし, $\mu_M > 0$, $\theta(x) = \sum_{j=1}^{l_Y} [\max\{0, r_j(x)\}]^s$ $(s \geq 1)$ とする. ここで, 関数 $F_{\mu_M}(x)$ は凸関数である (Bazaraa [2]). また, すべての $M \in \mathcal{M}$ に対して, $x(M) \in M$ を選ぶ. さらに, 各 $M \in \mathcal{M}$ 上での関数 F_{μ_M} の上界値 $\alpha(M)$, 下界値 $\beta(M)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}
&\alpha(M) = F_{\mu_M}(x(M)),\\
&\beta(M) = F_{\mu_M}(x(M)) - (\|\nabla f(x(M))\| + \mu_M \|d_M\|) \cdot \Delta(M).
\end{aligned}$$

ただし,

- $\Delta(M) = \max\{\|x-y\| : x, y \in M\}$. したがって, (B2) より, $\Delta(M) = \max\{\|v^1 - v^2\| : v^1, v^2 \in V(M)\}$ ($V(M)$ は M の頂点集合) であり, $\Delta(M)$ は単体 M の最も長い辺の長さである.

- d_M は θ の $x(M)$ における劣勾配ベクトルである. すなわち, $\partial\theta(x(M))$ を θ の $x(M)$ における劣微分とするとき, $d_M \in \partial\theta(x_M)$ となる.

このとき, 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $\alpha(M)$ の定義より,

$$\min\{F_{\mu_M}(x) : x \in M\} \leq \alpha(M) \tag{1}$$

が成立する. また, f, θ は凸関数なので (Bazaraa [2]), 任意の $x \in M$ に対して,

$$\begin{aligned}
&F_{\mu_M}(x)\\
&= f(x) + \mu_M \theta(x)\\
&\geq f(x(M)) + \langle \nabla f(x(M)), x - x(M) \rangle + \mu_M \theta(x(M)) + \langle d_M, x - x(M) \rangle\\
&\geq f(x(M)) - \|\nabla f(x(M))\| \cdot \Delta(M) + \mu_M \theta(x(M)) - \mu_M \|d_M\| \cdot \Delta(M)\\
&= F_{\mu_M}(x(M)) - \|\nabla f(x(M))\| \cdot \Delta(M) - \mu_M \|d_M\| \cdot \Delta(M)\\
&= \beta(M)
\end{aligned} \tag{2}$$

となる. したがって, $\min\{F_{\mu_M}(x) : x \in M\} \geq \beta(M)$ が成立する.

(B1) より, 任意の $x' \in (Y \backslash \mathrm{int}\ X) \cap M_1$ に対して, $x' \in M'$ を満たす $M' \in \mathcal{M}$ が存在する. ここで, 関数 F_{μ_M}, θ の定義より, $F_{\mu_{M'}}(x') = f(x')$ となる. また, (2) より, $\beta(M') \leq f(x')$ が成立する. したがって,

$$\min_{M \in \mathcal{M}} \beta(M) \leq \min(MP) \tag{3}$$

となる. ただし, $\min(MP)$ は問題 (MP) の最適値を表す.

本論文で提案するアルゴリズムでは, 集合 Y に対するペナルティ関数を用いることにより, 分割 M の各要素が Y と共通部分をもつか否かを判定せずに問題 (MP) の最適値を求めることができる.

3.2 アルゴリズム

アルゴリズム BB-P

ステップ 0. $s \geq 1$, $\mu > 0$, $1 < B < \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\bar{F} > \max\{f(x) : x \in M_1\}$ を定める. また, $t(M_1) = 1$ とし, 初期分割を $\mathcal{M}_1 = \{M_1\}$ とする. 便宜上, $\mathcal{M}_0 = \emptyset$ とする. $k \leftarrow 1$ として, ステップ 1 へ行く.

ステップ 1. 任意の $M \in \mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k-1}$ に対して, ペナルティパラメータ $\mu_M > 0$ を

$$\mu_M = \mu B^{\lceil t(M)/n \rceil}$$

とする. ただし, $\mu > 0$, $1 < B < \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\left\lceil \frac{t(M)}{n} \right\rceil = \max_{\substack{a \in Z \\ 0 \leq a \leq t(M)/n}} a$$

(Z はすべての整数の集合) である. ここで, すべての $M \in \mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k-1}$ に対して, $x(M) \in M$ を選ぶ. また, 各 $M \in \mathcal{M}_k \backslash \mathcal{M}_{k-1}$ に対して, 前節同様に関数 F_{μ_M} の上界値 $\alpha(M)$, 下界値 $\beta(M)$ を定める. さらに,

$$\beta(M_k) = \min\{\beta(M) : M \in \mathcal{M}_k\}$$

を満たす $M_k \in \mathcal{M}_k$ を選び, $x^k = x(M_k)$ とし, ステップ 2 へ行く.

ステップ 2. 次の条件 (SC) が成立するならばアルゴリズムを停止する.

$$\begin{aligned} &\alpha(M_k) = \beta(M_k) \\ &p(x^k) \geq 0 \\ &\theta(x^k) = 0 \end{aligned} \tag{SC}$$

このとき, x^k は問題 (RCP) の最適解である. 停止条件 (SC) が成立しないならば, ステップ 3 へ行く.

ステップ 3. M_k を分割し, 得られるパーティションを P_k とする (3.3 節). また,

$$\begin{aligned} Q_k &= \{M \in P_k : M \subset \mathrm{int}\ X\}, \\ S_k &= \{M \in \mathcal{M}_k \backslash \{M_k\} : \beta(M) \geq \bar{F}\} \end{aligned}$$

とし,

$$\mathcal{M}_{k+1} = ((\mathcal{M}_k \backslash \{M_k\}) \backslash S_k) \cup (P_k \backslash Q_k) \tag{4}$$

とする. さらに, 任意の $M \in P_k \backslash Q_k$ に対して $t(M) = t(M_k) + 1$ とする. $k \leftarrow k+1$ として, ステップ 1 へ戻る.

3.3, 3.4 節より, アルゴリズムの各反復で与えられる $\mathcal{M}_k$ は (B1), (B2), (B3), (B4) を満足することがわかる.

ステップ 2 において, x^k が停止条件 (SC) を満足するならば, $p(x^k) \geq 0$, $\theta(x^k) = 0$ より, $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\ X$ となる. よって, $f(x^k) \geq \min(MP)$ が成立する. また, $\alpha(M_k) = \beta(M_k)$ および (3) より, $\min(MP) \geq \beta(M_k) = \alpha(M_k) = F_{\mu_{M_k}}(x^k) = f(x^k)$ となる. したがって, x^k が問題 (MP) の最適解となる.

また, ステップ 3 において, 任意の $M \in P_k$ に対して, $M \subset \mathrm{int}\ X$ が成立するか否かを判定する. ここで, 仮定 (A3) より, $M \subset \mathrm{int}\ X$ となる必要十分条件は

$$p(v) < 0, \quad \forall v \in V(M)$$

が成立することである.

3.3 分枝操作 (M_k の分割方法)

本節では, アルゴリズム BB-P のステップ 3 における M_k の一分割方法を提案する. ここで, M_1 は単体であることに注意する. アルゴリズムの反復 k において, ステップ 1 で選ばれる $M_k \in \mathcal{M}_k$ が単体, 頂点集合 $V(M_k)$ が

$$V(M_k) = \{v^1, \ldots, v^{n+1}\}$$

で与えられているものとする. このとき, 任意の i', $i" \in \{1, \ldots, n+1\}$ $(i' \neq i")$ に対して $[v^{i'}, v^{i"}]$ は M_k の辺である. ここで, ある i_1, $i_2 \in \{1, \ldots, n+1\}$ $(i_1 \neq i_2)$ が

$$\|v^{i_1} - v^{i_2}\| = \max_{i', i"=1,\ldots,n+1} \|v^{i'} - v^{i"}\|$$

を満足するものとする. このとき, $u = (v^{i_1} + v^{i_2})/2$ とし,

$$M(j) = \mathrm{co}\ \{v^1, \ldots, v^{i_j-1}, u, v^{i_j+1}, \ldots, v^{n+1}\}, \qquad j = 1, 2$$

とする. すなわち, $P_k = \{M(1), M(2)\}$ と定める. このとき, 明らかに $\mathrm{int}\ M(1) \cap \mathrm{int}\ M(2) = \emptyset$ が成立する. したがって, 本節で提案する M_k の分割方法より, 各反復で与えられる $\mathcal{M}_k$ は (B2), (B3) を満たすことがわかる.

3.4 限定操作

本節では, アルゴリズム BB-P のステップ 3 で行われる限定操作の妥当性を示す. ここで, $T_k(x) = \{M \in \mathcal{M}_k : x \in M\}$ とする.

補題 3.1 任意の $k \in \{1, 2, \ldots\}$, $x \in (Y \backslash \mathrm{int}\ X) \cap M_1$ に対して, $x \in M$ を満たす $M \in \mathcal{M}_k$ が存在する.

証明. $k=1$ のとき, $\mathcal{M}_1=\{M_1\}$ なので明らか.

$k=l$ のとき, $x'\in(Y\backslash\mathrm{int}\,X)\cap M_1$ に対して, $x'\in M$ を満たす $M\in\mathcal{M}_l$ が存在することを仮定して, $k=l+1$ のとき, $x'\in M$ を満たす $M\in\mathcal{M}_{l+1}$ が存在することを示す. 仮定より, $T_l(x')\neq\emptyset$ が成立する. まず, $T_l(x')\backslash\{M_l\}\neq\emptyset$ の場合, 任意の $M\in T_l(x')\backslash\{M_l\}$ に対して, (2) より,

$$\beta(M)\leq\min_{x\in M}F_{\mu_M}(x)\leq F_{\mu_M}(x')=f(x')\leq\max_{x\in M_1}f(x)<\bar{F}$$

となる. したがって, $T_l(x')\backslash\{M_l\}\subset\mathcal{M}_{l+1}$ が成立する. 次に, $T_l(x')=\{M_l\}$ の場合を考える. ここで, $x'\in M_l$, さらに $M_l=\cup_{M\in P_l}M$ なので, $x'\in M'$ を満たす $M'\in P_l$ が存在する. また, $x'\notin\mathrm{int}\,X$ なので, $M'\not\subset\mathrm{int}\,X$ が成立するので, $M'\in\mathcal{M}_{l+1}$ となる. □

補題 3.1 より, アルゴリズム BB-P の各反復で与えられる $\mathcal{M}_k$ は (B1) を満たすことがわかる. また, ステップ 3 で行われる限定操作より, 任意の k に対して (B4) が成立する. さらに,

$$\beta(M)<\bar{F},\quad\forall M\in\mathcal{M}_{k+1}\backslash P_k$$

が成立する.

4　アルゴリズム BB-P の収束性

本章では, アルゴリズム BB-P より生成される点列 $\{x^k\}$ の任意の集積点が問題 (MP) の最適解となることを示す.

補題 4.1 *アルゴリズム BB-P より生成される点列 $\{x^k\}$ の任意の集積点 $\bar{x}$, $k\in\{1,2,\ldots\}$ に対して, $\bar{x}\in M_k'$ を満たす $M_k'\in\mathcal{M}_k$ が存在する.*

証明. ある反復 k' において, $\bar{x}\notin M,\forall M\in\mathcal{M}_{k'}$ とすると, $B(\bar{x},\delta)\cap\cup_{M\in\mathcal{M}_{k'}}M=\emptyset$ を満たす実数 $\delta>0$ が存在する. ただし, $B(\bar{x},\delta)=\{x\in R^n:\|x-\bar{x}\|<\delta\}$ である. また, $\{x^k\}_{k\geq k'}\subset\cup_{M\in\mathcal{M}_{k'}}M$ なので, $B(\bar{x},\delta)\cap\{x^k\}_{k\geq k'}=\emptyset$ となり, $\bar{x}$ が $\{x^k\}$ の集積点であることに矛盾する. したがって, すべての反復 k において, $\bar{x}\in M_k'$ を満足する $M_k'\in\mathcal{M}_k$ が存在する. □

補題 4.1 より, 任意の k に対して, $T_k(\bar{x})\neq\emptyset$ となる. さらに, 次の補題が成立する.

補題 4.2 *アルゴリズム BB-P より生成される点列 $\{x^k\}$ の任意の集積点 $\bar{x}$, 任意の $k'\in\{1,2,\ldots\}$ に対して $M_k\in T_k(\bar{x})$ となる $k\geq k'$ が存在する.*

証明. 任意の $k\geq k'$ に対して $M_k\notin T_k(\bar{x})$ を仮定して矛盾を導く. この仮定と (4) より $T_{k'}(\bar{x})\subset\mathcal{M}_k$ $(k\geq k')$ となる. (B2) よりすべての $M\in\mathcal{M}_k$ は単体なので,

$$M=\mathrm{cl}\ (\mathrm{int}\ M)\tag{5}$$

となる. よって, (5), (B3) より任意の $k\geq k'$ に対して

$$M'\cap\mathrm{int}\ M"=\emptyset,\qquad\forall M'\in T_{k'}(\bar{x}),\ M"\in\mathcal{M}_k\backslash T_{k'}(\bar{x})$$

となり, 任意の $M"\in\mathcal{M}_k\backslash T_{k'}(\bar{x})$ に対して,

$$\mathrm{int}\ M"\subset R^n\backslash\left(\bigcup_{M'\in T_{k'}(\bar{x})}M'\right)\subset R^n\backslash\mathrm{int}\ \left(\bigcup_{M'\in T_{k'}(\bar{x})}M'\right)$$

が成立する．また，$R^n\backslash\mathrm{int}\ \left(\cup_{M'\in T_{k'}(\bar{x})}M'\right)$ は閉集合なので，$M"$ が (5) を満たすことから，

$$M" \subset R^n\backslash\mathrm{int}\ \left(\bigcup_{M'\in T_{k'}(\bar{x})} M'\right), \qquad \forall M" \in \mathcal{M}_k\backslash T_{k'}(\bar{x})$$

となり，

$$\mathrm{int}\ \left(\bigcup_{M'\in T_{k'}(\bar{x})} M'\right) \cap \bigcup_{M"\in\mathcal{M}_k\backslash T_{k'}(\bar{x})} M" = \emptyset \tag{6}$$

が成立する．また，(B2) より

$$B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathrm{int}\ \left(\bigcup_{M'\in T_{k'}(\bar{x})} M'\right), \quad \forall k \geq k' \tag{7}$$

を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．アルゴリズムのステップ 1 における M_k, x^k の選び方および仮定から，すべての $k \geq k'$ に対して

$$x^k \in \bigcup_{M"\in\mathcal{M}_k\backslash T_{k'}(\bar{x})} M" \tag{8}$$

となる．したがって，(6), (7), (8) より

$$B(\bar{x},\varepsilon) \cap \{x^k\}_{k\geq k'} = \emptyset$$

が成立する．これは $\bar{x}$ が $\{x^k\}$ の集積点であることに矛盾する．よって，任意の $k' \in \{1,2,\ldots\}$ に対して $M_k \in T_k(\bar{x})$ となる $k \geq k'$ が存在する． □

補題 4.2 より，任意の $k' \in \{1,2,\ldots\}$ に対して $M_{k'_1} \in T_{k'_1}(\bar{x})$ となる $k'_1 \geq k'$ が存在することが分かる．さらに，k'_1+1 に対しても $M_{k'_2} \in T_{k'_2}(\bar{x})$ となる $k'_2 \geq k'_1+1$ が存在する．同様にして，$\bar{x} \in M_{k'_i}$, $i = 1,2,\ldots$, を満たす部分列 $\{M_{k'_i}\} \subset \{M_k\}$ が存在する．明らかに，$k'_1 < k'_2 < \cdots < k'_i < \cdots$ である．

補題 4.3 アルゴリズム *BB-P* より生成される点列 $\{x^k\}$ の任意の集積点 $\bar{x}$ に対して，

$$M_{k_1} \supset M_{k_2} \supset \cdots \supset M_{k_i} \supset \cdots \supset \{\bar{x}\} \tag{9}$$

を満たす部分列 $\{M_{k_i}\} \subset \{M_k\}$ が存在する．

証明． 補題 4.2 より，一般性を欠くことなく $\bar{x} \in M_k$, $k = 1,2,\ldots$, を仮定することができる．

まず，任意の $l \in \{1,2,\ldots\}$ に対して，

$$|\{M_{k_i}\}| \geq l,\ M_{k_1} \supset M_{k_2} \supset \cdots M_{k_i} \supset \cdots, \tag{10}$$

を満たす部分列 $\{M_{k_i}\} \subset \{M_k\}_{1\leq k\leq 2^{l-1}}$ が存在することを示す．ここで $l = 1$ のときは，$\{M_k\}_{1\leq k\leq 2^{l-1}} = \{M_1\}$ なので，(10) を満たす．また，$l \geq 2$ のときは，アルゴリズムの各反復における M_k の分割方法より，M_1 から $l-1$ 回以下の分割で生成される $\{M_k\}$ の要素の数は $2^{l-1}-1$ 個以下である．したがって，$\{M_k\}_{1\leq k\leq 2^{l-1}}$ は M_1 から l 回以上の分割で生成される要素を持つ．すなわち，任意の $l \in \{1,2,\ldots\}$ に対して，(10) を満たす $\{M_k\}_{1\leq k\leq 2^{l-1}}$ の部分列が存在する．よって，(9) を満足する $\{M_k\}$ の部分列が存在する．
□

補題 4.3, (9) を満足する $\{M_k\}$ の部分列 $\{M_{k_i}\}$ に対して，Horst and Tuy [4] (Proposition IV.2) より，

$$\Delta(M_{k_{i+n}}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta(M_{k_i}),\ \forall i \tag{11}$$

$$M_{k_i} \to \{\bar{x}\},\ i \to \infty \text{ のとき} \tag{12}$$

が成立する．

定理 4.1 アルゴリズム *BB-P* より生成される $\{x^k\}$ の任意の集積点 $\bar{x}$ は問題 (MP) の制約集合 $Y\backslash \mathrm{int}\ X$ に含まれる．さらに，$\bar{x}$ は問題 (MP) の最適解である．

証明． 点列 $\{x^k\}$ の任意の集積点を $\bar{x}$ とする．補題 4.3 より，一般性を失わずに，

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset \cdots \supset \{\bar{x}\}$$

とする．また，部分列 $\{M_{k_i}\} \subset \{M_k\}$ は次を満たすものとする．

$$k_{i+1} \geq k_i + n, \quad \forall i \tag{13}$$

まず，$\bar{x} \in \mathrm{int}\ X$ とすると，(12) より

$$M_{k_i} \subset \mathrm{int}\ X,\ \forall i \geq i'$$

を満たす i' が存在する．これは，(B4) に矛盾する．したがって，$\bar{x} \notin \mathrm{int}\ X$ となる．

次に，$\bar{x} \in Y$ を示す．ここで，$\bar{x} \notin Y$ を仮定して矛盾を導く．このとき，Y は閉集合なので，(12) より

$$M_{k_i} \subset R^n\backslash Y,\ \forall i \geq i' \tag{14}$$

を満たす i' が存在する．また，任意の i に対して $x^{k_i} \in M_{k_i}$ なので，(12)，(14) より，$i \to \infty$ のとき，

$$x^{k_i} \to \bar{x},\ \{x^{k_i}\}_{i \geq i'} \subset R^n\backslash Y$$

となる．ここで，$\{x^{k_i}\} \subset R^n\backslash Y$ を仮定しても一般性を失わない．このとき，

$$\lim_{i\to\infty} \theta(x^{k_i}) = \theta(\bar{x}) > 0 \tag{15}$$

となり，また

$$\begin{aligned}&\liminf_{i\to\infty} \beta(M_{k_i}) \\ &= \liminf_{i\to\infty}\left(F_{\mu_{M_{k_i}}}(x^{k_i}) - \|\nabla f(x^{k_i})\| \cdot \Delta(M_{k_i}) - \mu_{M_{k_i}}\|d_{M_{k_i}}\| \cdot \Delta(M_{k_i})\right)\end{aligned} \tag{16}$$

が成立する．さらに，$\lim_{i\to\infty} x^{k_i} = \bar{x}$ なので，(15) より

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty} F_{\mu_{M_{k_i}}}(x^{k_i}) &= \lim_{i\to\infty} F_{\mu_{M_{k_i}}}(x^{k_i}) \\ &= \lim_{i\to\infty}\left(f(x^{k_i}) + \mu_{M_{k_i}}\theta(x^{k_i})\right) \\ &\geq f(\bar{x}) + \theta(\bar{x})\mu_{M_{k_1}} \lim_{i\to\infty} B^{i-1} \\ &= +\infty\end{aligned} \tag{17}$$

となる．また，$\|f(x)\|$ は連続関数なので，(11)，(13) より，

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}(-\|\nabla f(x^{k_i})\| \cdot \Delta(M_{k_i})) &= -\limsup_{i\to\infty} \|\nabla f(x^{k_i})\| \cdot \Delta(M_{k_i}) \\ &\geq -\|\nabla f(x^{k_i})\| \cdot \Delta(M_{k_1}) \lim_{i\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{i-1} \\ &= 0\end{aligned} \tag{18}$$

となる．また，M_1 のコンパクト性より $\cup_{x\in M_1}\partial\theta(x)$ はコンパクト集合であるので (Rockafellar [7])，

$$\|d\| \leq A,\ \forall d \in \bigcup_{x\in M_1} \partial\theta(x)$$

を満たす $A>0$ が存在する．よって，$\{x^{k_i}\}\subset M_1$ なので，任意の i に対して $\|d_{M_{k_i}}\|\leq A$ となる．このとき，$B<2/\sqrt{3}$ より，

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}\left(-\mu_{M_{k_i}}\|d_{M_{k_i}}\|\cdot\Delta(M_{k_i})\right) &= -\limsup_{i\to\infty}\left(\mu_{M_{k_i}}\|d_{M_{k_i}}\|\cdot\Delta(M_{k_i})\right)\\ &\geq -\limsup_{i\to\infty}\left(\mu_{M_{k_i}}A\cdot\Delta(M_{k_i})\right)\\ &\geq -\mu_{M_{k_1}}A\delta(M_{k_1})\lim_{i\to\infty}\left(B\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{i-1}\\ &= 0\end{aligned} \tag{19}$$

が成立する．よって，(16), (17), (18), (19) より

$$\lim_{i\to\infty}\beta(M_{k_i})\geq+\infty$$

となる．これは，$\beta(M_{k_i})\leq\min(MP)\quad\forall i$ に矛盾する．したがって，$\bar{x}\in Y$ が成立する．

最後に，$\bar{x}$ が問題 (MP) の最適解であることを示す．ここで，$\bar{x}$ は問題 (MP) の実行可能解なので，$f(\bar{x})\geq\min(MP)$ が成立する．また，ペナルティ関数 θ，ペナルティパラメータ μ_M の定義より，任意の i に対して $\mu_{M_{k_i}}\theta(x^{k_i})\geq 0$ となる．よって，(3), (18), (19) より，

$$\begin{aligned}\min(MP) &\geq \limsup_{i\to\infty}\beta(M_{k_i})\\ &\geq \liminf_{i\to\infty}\beta(M_{k_i})\\ &= \liminf_{i\to\infty}\left(F_{M_{k_i}}(x^{k_i})-\|\nabla f(x^{k_i})\|\cdot\Delta(M)-\mu_{M_{k_i}}\|d_{M_{k_i}}\|\cdot\Delta(M)\right)\\ &\geq \liminf_{i\to\infty}F_{M_{k_i}}(x^{k_i})\\ &= \liminf_{i\to\infty}\left(f(x^{k_i})+\mu_{M_{k_i}}\theta(x^{k_i})\right)\\ &\geq \liminf_{i\to\infty}f(x^{k_i})\\ &= f(\bar{x})\end{aligned}$$

が成立する．したがって，$\{x^k\}$ の任意の集積点 $\bar{x}$ は問題 (MP) の最適解である． □

定理 4.1 より，

$$\liminf_{k\to\infty}p(x^k)\geq 0,\quad \limsup_{k\to\infty}\theta(x^k)\leq 0$$

が成立する．また，(11) より $\limsup_{k\to\infty}\Delta(M_k)\leq 0$ となるので，

$$\limsup_{k\to\infty}(\alpha(M_k)-\beta(M_k))\leq 0$$

が成立する．このとき，アルゴリズム BB-P は許容誤差 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3>0$ を用いて停止条件を

$$\begin{aligned}&\alpha(M_k)-\beta(M_k)<\gamma_1\\ &p(x^k)>-\gamma_2\\ &\theta(x^k)<\gamma_3\end{aligned}$$

とすることで有限回の反復で停止することができ，問題 (RCP) の近似解が得られる．

5 おわりに

本論文では，集合 X, Y がコンパクト集合であるとは限らない逆凸計画問題 (RCP) に対する分枝限定法を提案した．提案するアルゴリズムは，分割の各要素と集合 Y の共通部分が空集合でないことを判定する代わりに，集合 Y に対するペナルティ関数を用いることにより，生成される暫定解の列 $\{x^k\}$ の任意の集積点が問題 (RCP) の制約集合に含まれることを保証する．さらに，逐次的に問題 (RCP) の最適値を過小評価しているため，$\{x^k\}$ の任意の集積点が問題 (RCP) の最適解であることが示される．

参考文献

[1] M. Avriel and A. C. Williams: "Complementary Geometric Programming", *SIAM Joural on Applied Mathematics*, Vol. 19, pp. 125–141 (1970).

[2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty: *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms,* 2nd ed., John Wiley, New York (1993).

[3] R. J. Hillestad and S. E. Jacobsen: "Reverse Convex Programming", *Applied Mathematics and Optimization*, Vol. 6, pp. 63–78 (1980).

[4] R. Horst and H. Tuy: *Global Optimization: Deterministic Approaches, Third, Revised and Enlarged Edition*, Springer-Verlag, Berlin (1996).

[5] H. Konno, P.T. Thach and H. Tuy: *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).

[6] R. Meyer: "The Validity of a Family of Optimization Methods", *SIAM Journal on Control*, Vol. 8, pp. 42–54 (1970).

[7] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).

[8] J. B. Rosen: "Iterative Solution of Nonlinear Optimal Control Problems", *SIAM Journal on Control*, Vol. 4, pp. 223–244 (1966).

[9] H. Tuy and NG. V. Thuong: "Minimizing a Convex Function over the Complement of a Convex Set", *Proceedings of the 9th Symposium on Operations Research*, Osnabrück, Germany (1984).

[10] H. Tuy: "Convex Programs with an Additinal Reverse Convex Constraint", *Journal of Optimization Theory and Apprications*, Vol. 52, No. 3 (1987).

[11] H. Tuy: *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998).

[12] U. A. Ueing: "A Combinatorial Method to Compute a Global Solution of Certain Nonconvex Optimization Problems", *Numerical Methods for Nonlinear Optimization*, Edited by F.A. Lootsma, Academic Press, New York, pp. 223–230 (1972).

[13] A. B. Zaleesky: "Nonconvexity of Feasible Domains and Optimization of Management Decision (in Russian)", *Ekonomika i Matematitcheskie Metody*, Vol. 16, pp. 1069–1081 (1980).